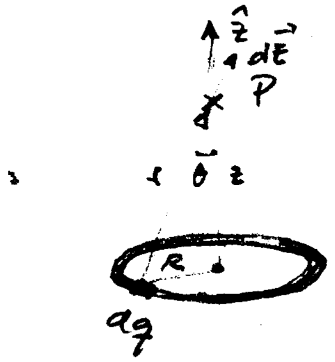
Anel carregado uniformemente: campo em um ponto P situado sobre um eixo ($\hat{z}$) $\perp$ ao plano do anel, passando pelo centro do anel.

Raio do anel = R.



Comprimento do anel = $2\pi R$

Carga total do anel é Q.

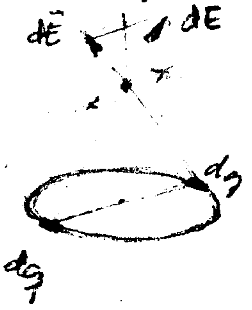
λ = densidade linear de carga do anel

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

Se o anel é uniformemente carregado $\Rightarrow \lambda = \text{cte}$.

A contribuição para o campo elétrico total devido a um elemento de carga dq é $d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\hat{r}$.

Por simetria é evidente que o campo total deve estar ao longo do eixo $\hat{z}$ pois, para cada elemento dq existe um outro, diametralmente oposto que contribui com o mesmo valor de $|d\vec{E}|$ porém com direção e sentido que cancela a componente $\perp$ ao plano do anel.



A componente ao longo de $\hat{z}$ da contribuição é

$$dE_z = |d\vec{E}|\cos\theta = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta$$

Temos que somar sobre todos os elementos infinitesimais de carga que compõem o anel.

$$E_z = \int dE_z = \int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta$$

Note que, nesse caso, a soma é muito simples pois ao variar dq, nem $r \equiv |\vec{r}|$ nem $\cos\theta$ variam. Sendo assim, podemos colocá-los em evidência e o resultado é

$$E_z = \frac{k}{r^2}\cos\theta \int dq = \frac{kQ\cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{E} = E_z\hat{z} = \frac{kQ}{r^2}\cos\theta\,\hat{z}$$

$$\cos\theta = z/r \Rightarrow \vec{E} = \frac{kQ}{r^3}z\,\hat{z}$$

$$r = \sqrt{z^2+R^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{kQ}{(z^2+R^2)^{3/2}}z\,\hat{z}}$$

Em termos da densidade de carga λ

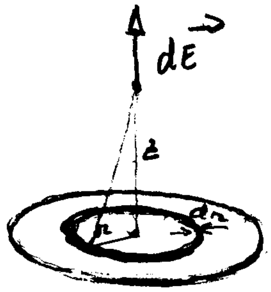
$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} \Leftrightarrow Q = 2\pi R\lambda \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = k\lambda\frac{2\pi R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{z}} \qquad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Disco uniformemente carregado. Campo em um ponto P situado sobre o eixo $\hat{z}$ $\perp$ ao plano do disco, passando pelo seu centro.

Disco de raio R e carga total Q.

"Macete": Divide o disco em aneis.

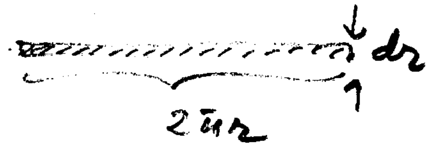


Um anel de raio r tem carga dq.

Densidade superficial de carga do disco $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$

Disco uniformemente carregado $\Leftrightarrow$ $\sigma = \underline{cte}$.

O aneizinho de raio r tem área



$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

$$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{(z^2+r^2)^{3/2}}\, z\,\hat{z} = \frac{k\,\sigma\, 2\pi r\, dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\, z\,\hat{z}$$

$$\vec{E} = \underbrace{\int d\vec{E}}_{\text{soma sobre todos os aneis que compõem o disco}} = \int k\sigma 2\pi z \frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}\,\hat{z}$$

Nota que, ao variar r ($k, \sigma, 2\pi, z$ e $\hat{z}$ são ctes) $\Rightarrow$

$$\vec{E} = k\sigma 2\pi z\,\hat{z} \int_0^R \frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

Com $z = \text{cte}$ chamamos $u = z^2 + r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr$

$r = 0 \quad u = z^2$

$r = R \quad u = z^2 + R^2$

$$\Rightarrow \vec{E} = k\sigma\pi z\hat{z} \int_{z^2}^{z^2+R^2} \frac{du}{u^{3/2}} =$$

$$= k\sigma\pi z\hat{z} \left. \frac{u^{-3/2+1}}{-3/2+1} \right|_{z^2}^{z^2+R^2} = k\sigma\pi z\hat{z}\,(-)2u^{-1/2} \Big|_{z^2}^{z^2+R^2}$$

$-3/2 + 1 = -1/2$

$$\vec{E} = 2k\sigma\pi z\hat{z} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2+R^2)^{1/2}} \right] = 2k\sigma\pi\hat{z} \left[1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} \right]$$

$$\vec{E} = k\,2\pi\sigma \left[1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} \right] \hat{z}$$

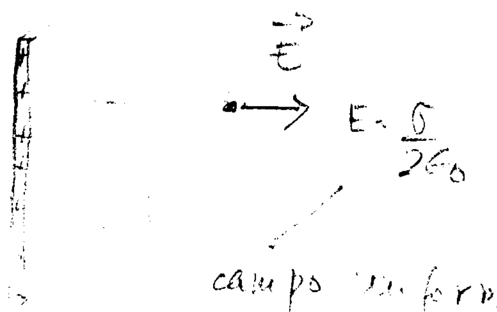
$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}} \right] \hat{z}$$

$$\lim_{R \to \infty} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}$$

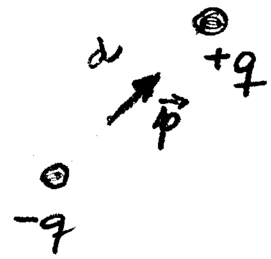
Campo devido a um plano uniformemente carregado

Façam os exemplos 5 e 6.



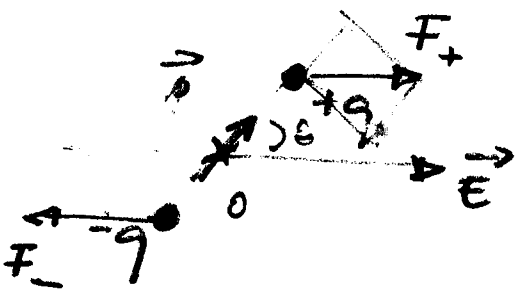
campo uniforme
independe da distância ao plano.

Dipolo em um campo elétrico



Momento do dipolo elétrico $p = qd$. Convencionou-se que a direção de $\vec{p}$ é a reta que une as duas cargas e o sentido de $-q$ para $+q$.

Suponha que um campo elétrico externo $\vec{E}$, uniforme, é aplicado, tal que $\vec{E}$ faça um ângulo θ com $\vec{p}$.



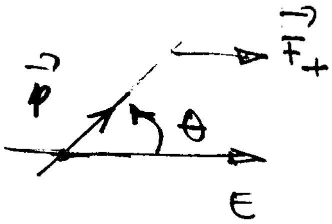
As forças $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre cada uma das cargas estão representadas na figura.

$\vec{F}_+$ e $\vec{F}_-$ tem mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos. A força resultante sobre o dipolo (composto pelas duas cargas) é nula. Entretanto, elas formam um binário, de modo que o dipolo irá girar em torno de um eixo $\perp$ ao plano do papel. O torque devido a F_+ e F_- é dado por

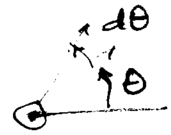
$$\tau = 2qE\sin\theta \cdot \frac{d}{2} = pE\sin\theta \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$$

$|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-| = qE = F$; $p = qd$

Note que o torque tende a alinhar o dipolo $\vec{p}$ na direção do campo $\vec{E}$.



$\vec{\tau}$ $\otimes$ $\odot$ $\hat{\theta}$



O trabalho realizado pelo campo para girar o dipolo de um ângulo θ

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta} = -\int_{\theta_0}^{\theta} \tau \, d\theta = -\int_{\theta_0}^{\theta} pE \sin\theta \, d\theta$$

$$W = pE \cos\theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} = pE[\cos\theta - \cos\theta_0]$$

Energia potencial $U(\theta) - U(\theta_0) = -W = -pE\cos\theta \Big|_{\theta_0}^{\theta}$

$-pE[\cos\theta - \cos\theta_0]$

$$\boxed{U = -pE\cos\theta}$$

$U(\theta_0 = 90) = 0$

$U(\theta) = -pE\cos\theta$

Escolha do zero de energia potencial.

Funcionamento do micro-ondas.

Água é uma molécula polar

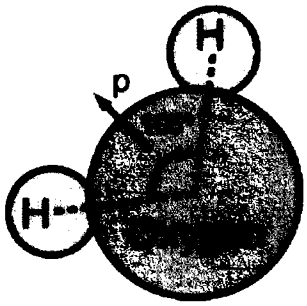
Campo elétrico do micro-ondas é oscilatório (dependente do tempo), interage com o momento de dipolo elétrico da molécula d'água.

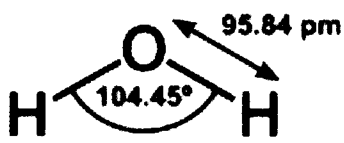
O torque provoca oscilações nas moléculas d'água e as colisões com as outras provoca o aquecimento.

Frequência típica do campo de micro-ondas utilizado.

$$f \simeq 2.5\ GHz$$

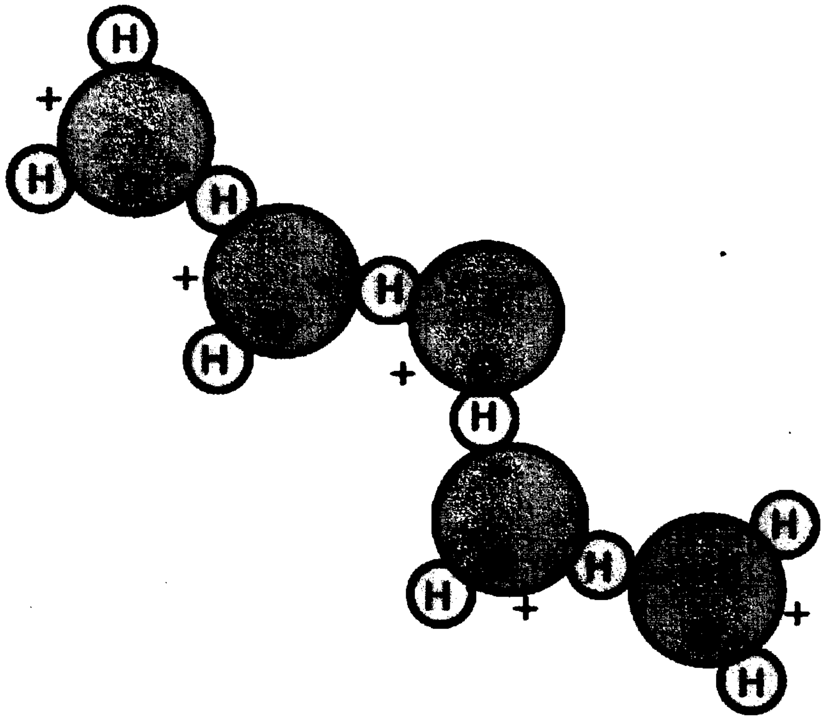
H_2O momento de dipolo elétrico





$p_{H2O} = 6.17\times10^{-30}$ C m = 1.85 debye.
1 d = 3.33×10^{-30} C m

$p = 6.2x10^{-30} C \cdot m$



Quando se coloca certos objetos metálicos em um micro-ondas ocorrem faíscas.

Entretanto, o interior do micro-ondas é metálico!